Séries

1 Introduction aux séries

1.1 Série, somme, premiers exemples

Définition **(Série, sommes partielles)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ($n^{\text{ème}}$ *somme partielle*). La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la *série de terme général* u_n et notée $\sum u_n$.

Une série n'est donc jamais qu'une suite, et dire que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) revient simplement à dire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge). La *nature* de la série $\sum u_n$ est par définition sa convergence ou sa divergence.

Mais alors si les séries ne sont que des suites, pourquoi se doter d'une théorie des séries ? La théorie des suites n'est-elle pas suffisante ? La réponse est non.

- **Grande question de la théorie des suites :** À quelle condition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
- **Grande question de la théorie des séries :** À quelle condition sur la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la **série** $\sum u_n$ est-elle convergente ? Cette question spécifique appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet du chapitre.

Il est facile et utile de résumer ce chapitre par quelques intuitions simples. D'abord, si la série $\sum u_n$ converge, i.e. si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $S \in \mathbb{C}$, alors : $u_n = U_n - U_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. De fait, si on s'approche de ℓ en additionnant $u_0, u_1, u_2\ldots$, il paraît naturel qu'on finisse par ne plus ajouter grand-chose à mesure que n grandit. **La réciproque est archi-fausse** en revanche, il ne suffit pas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 pour que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, mais nous savons bien que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

La convergence de la **série** $\sum u_n$ repose schématiquement sur deux caractéristiques de la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- la taille de u_n lorsque n tend vers $+\infty$,
- l'importance des compensations mutuelles que les nombres $u_0, u_1, u_2\ldots$ occasionnent quand on les additionne.

Le cas des suites **positives** nous occupera un certain temps. S'ils sont positifs, en effet, les réels $u_0, u_1, u_2\ldots$ s'empilent les uns sur les autres sans jamais se compenser quand on les additionne et la convergence de la série $\sum u_n$ ne dépend que de la taille asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le cas des suites réelles qui changent régulièrement de signe — ou plus généralement des suites complexes — est plus délicat et plus diversifié. Nous nous intéresserons au moins de près aux *séries alternées*, i.e. aux séries de la forme $\sum (-1)^n a_n$ dans lesquelles la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant. C'est le cas le plus simple de compensations des termes sommés entre eux, dont voici un premier exemple.

Exemple Les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ convergent.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement croissante, donc pour montrer qu'elle converge, il nous reste à montrer qu'elle est majorée. Or pour tout $n \geqslant 2$: $U_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 2$. Archi-classique !

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ressemble quant à elle de loin à la série $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge, mais ses termes se compensent en partie les uns les autres. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)}$.

Cette nouvelle expression montre que $(V_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, mais aussi majorée donc convergente car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} = \frac{U_n}{2} \leqslant 1$. La suite $(V_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers la même limite car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_{2n+1} = V_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$. Conclusion : $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Retenez bien ceci. Les réels $\frac{(-1)^n}{n}$ se sont compensés de proche en proche et nous ont permis de passer d'une somme de termes **ASSEZ GROS** en valeur absolue à des termes **BEAUCOUP PLUS PETITS** : $\frac{1}{2n(2n-1)} \approx \frac{1}{4n^2}$. La compensation a favorisé la convergence.

Définition (Somme d'une série convergente, restes) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La limite finie : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et appelée la *somme* de la série.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on pose : $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ ($n^{\text{ème}}$ *reste* de la série), alors : $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Comme dans le cas des suites, les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa nature, i.e. sur sa convergence ou sa divergence. Ils affectent en revanche la valeur de sa somme lorsqu'elle est convergente.

Vous en serez peut-être déçus, mais le but de la théorie des séries n'est pas tant de calculer les sommes de séries convergentes que de savoir tracer une frontière nette entre le monde des séries convergentes et le monde des séries divergentes.

Définition-théorème (Série géométrique) Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$, dite *série géométrique de raison z*, est convergente si et seulement si : $|z| < 1$. Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si : } z \neq 1 \\ n+1 & \text{si : } z = 1. \end{cases}$

Le résultat découle donc du comportement asymptotique bien connu de la **SUITE** géométrique $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Exemple La série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*, diverge — **ET POURTANT** : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Démonstration

- **Preuve n°1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, or si la série $\sum \frac{1}{n}$ était convergente de somme S, on aurait : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$ — contradiction !
- **Preuve n°2 :** Pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln k\Big) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et on conclut par minoration.

1.2 DIVERGENCE GROSSIÈRE

Théorème (Condition nécessaire de convergence d'une série) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Si la série $\sum u_n$ converge : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration Si $\sum u_n$ converge, disons vers S : $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. ■

Définition (Divergence grossière) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement* si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. Dans ce cas, $\sum u_n$ diverge « tout court ».

✖ **Attention !** La réciproque de l'implication : $\sum u_n$ converge $\implies$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ est fausse en général. Affirmer le contraire, c'est avouer qu'on n'a **ABSOLUMENT RIEN COMPRIS** à la théorie des séries. S'il suffisait de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ pour montrer que $\sum u_n$ converge, ce chapitre spécifique n'existerait pas ! En résumé :

Une somme infinie de quantités qui tendent vers 0 peut ne pas converger.

Exemple Répétons-le, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, **ET POURTANT :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.3 Opérations sur les séries

Théorème (Opérations sur les séries) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum(\lambda u_n)$ ont même nature.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, la série $\sum(u_n+v_n)$ converge aussi.
- Si la série $\sum u_n$ converge alors que la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
- La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.

Démonstration Le résultat est vrai pour les suites, et justement les séries sont des suites. ■

✖ **Attention !**

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent toutes les deux, on ne peut rien dire en général de $\sum(u_n+v_n)$. Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série : $\sum \frac{1}{n} + \sum \frac{1}{n} = \sum \frac{2}{n}$ aussi, mais la série : $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = 0$ converge.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on ne peut rien dire en général de la série $\sum u_n v_n$. Nous verrons bientôt que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et pourtant la série : $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

1.4 Comparaison série-intégrale et séries de Riemann

Nous avons déjà pratiqué pas mal les comparaisons série-intégrale au chapitre « Analyse asymptotique de niveau 2 », qui comparent typiquement la somme $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ à l'intégrale $\int_0^n f(t)\,dt$ pour une fonction **MONOTONE** f.

Définition-théorème (Séries de Riemann, fonction ζ) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, dite *série de Riemann*, converge si et seulement si : $\alpha > 1$. On pose dans ce cas : $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Nous savions déjà que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, nous apprenons ici qu'elle fait office de seuil dans le cadre des séries de Riemann. « Au-delà », convergence — « en deçà », divergence.

La fonction ζ est une fonction usuelle majeure des mathématiques intimement liée à la répartition des nombres premiers — en dépit des apparences !

Démonstration Si $\alpha \leqslant 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement). Nous supposerons désormais $\alpha > 0$. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est dans ce cas continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$, puis par croissance de l'intégrale : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

- **Cas où** $\alpha \in]0,1[$ **:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$, or : $1-\alpha > 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ par minoration. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- **Cas où** $\alpha = 1$ **:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \ln(n+1)$, donc par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ — nouvelle preuve que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- **Cas où** $\alpha > 1$ **:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$, donc la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Pour montrer qu'elle converge, d'après le théorème de la limite monotone, il nous reste à montrer qu'elle est majorée. Or c'est le cas car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sachant que $\alpha - 1 > 0$:
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}. \quad \blacksquare$$

Exemple La série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

Démonstration Par décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $]1, +\infty[$, pour tout $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k \ln k} \geqslant \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \ln\ln(n+1) - \ln\ln 2, \quad \text{donc :} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = +\infty.$$

2 Séries à termes positifs

On étudie à présent les séries dont le terme général est positif — sous-entendu : ou nul. Ce qui est vrai de ces séries serait en fait vrai des séries dont le terme général est négatif ou nul. L'essentiel est donc, dans ce paragraphe, que le terme général soit **de signe constant** — et même **à partir d'un certain rang.**

✖ **Attention !** Quand vous utilisez les théorèmes de ce paragraphe, vérifiez bien la **positivité** des suites étudiées !

Théorème (Adaptation aux séries du théorème de la limite monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ **positive.** La série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle est majorée.
En cas de divergence, toujours grâce à la positivité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$.

Démonstration La suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geqslant 0$. Elle converge donc en effet si et seulement si elle est majorée d'après le théorème de la limite monotone. $\blacksquare$

Théorème (Comparaison par des inégalités) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. On suppose que : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ est majorée, donc converge d'après l'adaptation aux séries du théorème de la limite monotone.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ d'après l'adaptation aux séries du théorème de la limite monotone, donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$ par minoration, donc la série $\sum v_n$ diverge. ■

Exemple La série $\sum \frac{1}{n^2(2+\sin n)}$ converge.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \frac{1}{n^2(2+\sin n)} \leqslant \frac{1}{n^2}$, or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car : $2 > 1$, donc la série $\sum \frac{1}{n^2(2+\sin n)}$ converge aussi d'après le théorème de comparaison par des inégalités.

Exemple La série $\sum \frac{e^{\cos n}}{\sqrt{n}}$ diverge.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \frac{1}{e\sqrt{n}} \leqslant \frac{e^{\cos n}}{\sqrt{n}}$, or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car : $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc la série $\sum \frac{e^{\cos n}}{\sqrt{n}}$ diverge aussi d'après le théorème de comparaison par des inégalités.

> **Théorème (Comparaison par des équivalents)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que ces suites sont POSITIVES et que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont alors même nature.

✖ **Attention !** On a vite fait d'oublier l'hypothèse fondamentale de POSITIVITÉ !

Démonstration La relation d'équivalence sur les suites étant symétrique, il nous suffit de montrer que si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. Or par hypothèse : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, donc : $\left|\frac{u_n}{v_n}\right| < 2$ à partir d'un certain rang, ou encore : $0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$. Par comparaison du coup, si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. ■

Exemple La série $\sum \frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)}$ converge.

Démonstration Cette série est à termes positifs et : $\frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$, or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge car : $3 > 1$, donc la série $\sum \frac{1}{n^2\left(n+\sqrt{n}\right)}$ par comparaison.

3 LE LIEN SUITE-SÉRIE

Le *lien suite-série* est d'une grande banalité à ce stade de l'année, mais il faut connaître plus que le résultat, il faut surtout en comprendre la philosophie.

> **Théorème (Lien suite-série)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La SUITE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la SÉRIE $\sum (a_{n+1} - a_n)$ ont même nature.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par simplification télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$. ■

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Aviez-vous compris que la simplification télescopique est l'analogue discret du théorème fondamental du calcul intégral ? La suite $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tout comme la fonction f' définie par une limite de taux d'accroissement est la dérivée de la fonction f. Or comment passe-t-on de f' à f ? On somme au sens du calcul intégral, tout comme on le fait avec les suites dans le cadre d'une simplification télescopique :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a) \qquad \text{dans un cas et :} \qquad \sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = a_n - a_m \qquad \text{dans l'autre.}$$

Au chapitre « Dérivabilité », nous avons appris à exploiter f', i.e. à remonter de f' à f, au moyen du théorème des accroissements finis. D'après l'inégalité des accroissements finis, quand nous savons borner f', nous savons aussi borner f. Bref, la taille de f' conditionne celle de f. Le lien suite-série est l'analogue de cette idée dans le cas discret. Typiquement, si la suite $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend suffisamment vers 0, i.e. si la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi.

Exemple La série $\sum\frac{1}{n}$ diverge. Encore !

Démonstration **(Preuve n°3)** La SUITE $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge, donc la SÉRIE $\sum\big(\ln(n+1)-\ln n\big) = \sum\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ également. Comme cette série est à termes positifs et : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Nous pouvons en fait pousser le lien suite-série un peu plus loin sur le même exemple.

Exemple Il existe un réel γ, appelé *constante d'Euler*, pour lequel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$. Encore !

Démonstration Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n = \ln n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Nous souhaitons prouver que la SUITE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. En vertu du lien suite-série, il nous suffit pour cela de montrer que la SÉRIE $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge. Or pour tout $n\geqslant 2$: $a_n - a_{n-1} = \left(\ln n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\ln(n-1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{n} - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Cet équivalent prouve d'abord que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, mais comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, il prouve aussi que la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge par comparaison. Conclusion : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Terminons ce paragraphe par une tentative de calcul apparemment gratuite relative aux accroissements de la suite $(n\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Nous allons d'abord calculer un développement asymptotique de ces accroissements, puis nous sommerons en hommage à la philosophie du lien suite-série.

$$\begin{aligned}(n+1)\ln(n+1) - n\ln n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) &\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \ln(n+1) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ce développement montre que la série $\sum\left((n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \ln(n+1) - 1 + \frac{1}{2n}\right)$ converge par comparaison car la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge. Et alors ? Cela signifie que pour un certain réel ℓ :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left((k+1)\ln(k+1) - k\ln k - \ln(k+1) - 1 + \frac{1}{2k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1),$$

i.e. après simplification télescopique que : $n\ln n - \ln(n!) - (n-1) + \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$. En d'autres termes :

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\big(\ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)\big) + 1 - \ell + \mathrm{o}(1) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \ell' + \mathrm{o}(1) \qquad \text{si on pose :} \quad \ell' = 1 - \ell + \frac{\gamma}{2}.$$

Finalement : $n! \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \ell' + \mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\ell'}\sqrt{n}\times\mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\ell'}\sqrt{n}$. Nous venons ainsi de retrouver la formule de Stirling sans aide à partir d'une tentative de rien du tout. Les intégrales de Wallis montrent bien sûr que : $\mathrm{e}^{\ell'} = \sqrt{2\pi}$, mais cela relève d'une autre investigation.

4 Convergence absolue et séries alternées

4.1 Convergence absolue

Définition (Convergence absolue) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* ou qu'elle *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument car, comme : $\quad 2 > 1, \quad$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Une question se pose naturellement après cette définition — une série absolument convergente est-elle convergente ? — et la réponse est oui.

Théorème (La convergence absolue implique la convergence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, elle converge « tout court ».

Démonstration

- **Cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle :** Comme : $\quad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n| \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme la série $\sum |u_n|$ converge par hypothèse, le théorème de comparaison par des inégalités montre que la série $\sum \big(u_n + |u_n|\big)$ converge. Par différence, la série $\sum u_n$ converge à son tour.
- **Cas général :** Comme : $\quad 0 \leqslant \big|\mathrm{Re}(u_n)\big| \leqslant |u_n| \quad$ et $\quad 0 \leqslant \big|\mathrm{Im}(u_n)\big| \leqslant |u_n| \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème de comparaison par des inégalités montre que les séries $\sum \big|\mathrm{Re}(u_n)\big|$ et $\sum \big|\mathrm{Im}(u_n)\big|$ convergent toutes les deux. Les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent donc d'après le premier point. Par combinaison linéaire, la série $\sum u_n = \sum \Big(\mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(u_n)\Big)$ converge à son tour. ■

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^2+1}$ converge.

Démonstration Il nous suffit de montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^2+1}$ converge absolument, i.e. que la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge. Or c'est le cas d'après le théorème de comparaison par des inégalités car d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad$ et d'autre part, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

✖ **Attention !** La réciproque du théorème précédent est **fausse** ! Une série peut converger sans converger absolument. C'est le cas de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ que nous avons déjà étudiée. On dit qu'elle est *semi-convergente*.

Définition (Semi-convergence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *semi-convergente* si elle est convergente mais **pas** absolument convergente.

4.2 Comparaison par des grands O

Théorème (Comparaison par des grands O) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **positive**, que : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n) \quad$ et que la série $\sum v_n$ converge. Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Rappelons que si : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. Le théorème de comparaison par des grands O est ainsi souvent utilisé avec des petits o sans qu'on prenne la peine de revenir à des grands O.

En particulier, comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$, il est courant qu'on utilise la forme suivante du théorème de comparaison par des grands O :

Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ pour un certain $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Démonstration Par hypothèse, il existe un rang N et un réel $K > 0$ tels que pour tout $n \geqslant N$: $|u_n| \leqslant K|v_n|$, i.e. : $0 \leqslant |u_n| \leqslant K v_n$, ce qui nous ramène simplement au théorème de comparaison par des inégalités. ■

Exemple La série $\sum \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{\cos n}}{n^3 - n}$ converge.

Démonstration Pour commencer : $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{\cos n}}{n^3 - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\cos n}}{n^{\frac{5}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série de Riemann à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car : $2 > 1$, donc la série $\sum \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{\cos n}}{n^3 - n}$ converge aussi d'après le théorème de comparaison par des grands O.

4.3 Règle de d'Alembert

Comme nous l'avons vu, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si : $|z| < 1$. On peut dès lors espérer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ressemble assez fortement à une suite géométrique de raison z, la convergence de la série $\sum u_n$ soit intimement liée à la valeur de z et à sa position par rapport à 1 en module. Ce sera cela, la *règle de d'Alembert*. Officiellement, cette règle est hors programme en MPSI, mais vous l'étudierez en deuxième année.

Par exemple, la suite $\left(3^n n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, mais elle est « presque géométrique de raison 3 » au sens où : $\frac{3^{n+1}(n+1)^2}{3^n n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$. De même, la suite $\left(\frac{\ln n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sans être géométrique, est « presque géométrique de raison $\frac{1}{2}$ » au sens où : $\frac{2^{-(n+1)}\ln(n+1)}{2^{-n}\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. En ce sens, toute suite de la forme $\left(n^\alpha (\ln n)^\beta\right)_{n\geqslant 2}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est « presque géométrique de raison 1 ». Cette expression « presque géométrique » n'a bien sûr rien d'officiel et ne doit pas être utilisée dans une copie, mais elle est assez parlante.

Théorème (Règle de d'Alembert) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. On suppose que : $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ — en tout cas à partir d'un certain rang.

(i) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

(ii) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

✖ **Attention !** La règle de d'Alembert est muette lorsque la limite vaut 1, on appelle ce cas le *cas douteux de la règle de d'Alembert*. Pensez aux séries de Riemann, qui peuvent converger ou diverger selon la valeur de l'exposant choisi.

Démonstration Faisons l'hypothèse que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe et notons-la ℓ. La preuve qui suit consiste à COMPARER LA SÉRIE $\sum u_n$ À UNE SÉRIE GÉOMÉTRIQUE — dont nous maîtrisons parfaitement la nature.

(i) **Cas où $\ell < 1$:** Posons : $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ de manière à avoir : $0 \leqslant \ell < \ell + \varepsilon < 1$. On peut affirmer que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang N, et donc que pour tout $n \geqslant N$: $\frac{|u_{n+1}|}{(\ell+\varepsilon)^{n+1}} \leqslant \frac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^n}$. Décroissante positive, la suite $\left(\frac{|u_n|}{(\ell+\varepsilon)^n}\right)_{n\geqslant N}$ est alors bornée, donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left((\ell+\varepsilon)^n\right)$. Or la série géométrique $\sum (\ell+\varepsilon)^n$ converge car : $0 \leqslant \ell + \varepsilon < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge (absolument) d'après le théorème de comparaison par des grands O.

(ii) **Cas où $\ell > 1$:** À partir d'un certain rang : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$, donc la suite $\left(|u_n|\right)_{n\geqslant N}$ est croissante — et strictement positive par ailleurs — donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. La série $\sum u_n$ diverge (grossièrement). ■

Le calcul de : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ est plus facile à faire si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à l'aide de produits et de quotients. On peut notamment espérer des simplifications au numérateur et au dénominateur dans ce cas.

Exemple La série $\sum \dfrac{n^4}{3^n}$ converge d'après la règle de d'Alembert car : $\left|\dfrac{3^{-(n+1)}(n+1)^4}{3^{-n}n^4}\right| = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3} < 1$. On n'est bien sûr pas obligé d'utiliser la règle de d'Alembert, on peut aussi remarquer que : $\dfrac{n^4}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées et conclure à l'aide du théorème de comparaison par des grands O.

Exemple La série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z\in\mathbb{C}$.
On définit souvent la fonction exponentielle comme la somme de cette série, de sorte que pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.
Cette définition a ceci d'intéressant qu'elle nous fournit d'un coup d'un seul une fonction définie sur $\mathbb{C}$ tout entier. Notre exponentielle de début d'année avait quelque chose de bâtard, définie qu'elle était comme un mélange curieux d'exponentielle réelle, de sinus et de cosinus. En réalité, ce sont plutôt les fonctions sinus et cosinus qu'on peut maintenant définir à partir de l'exponentielle complexe — et même le nombre π !
La difficulté bien sûr, c'est que la définition : $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ ne nous apprend pas immédiatement que pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$, ni que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même. Affaire à suivre !

Démonstration Soit $z\in\mathbb{C}$. Si : $z=0$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge. Sinon : $\left|\dfrac{\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{z^n}{n!}}\right| = \dfrac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge d'après la règle de d'Alembert.

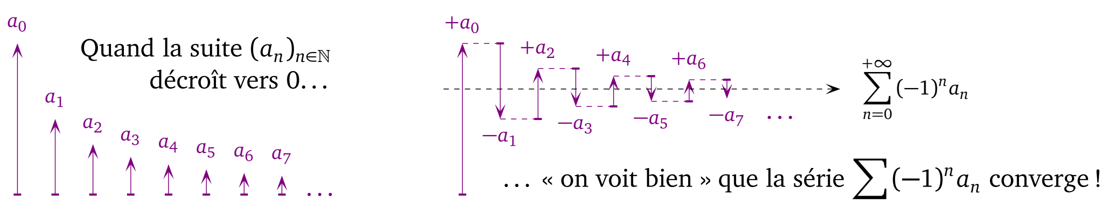
4.4 Séries alternées

Les *séries alternées* et le *critère spécial des séries alternées* sont hors programme en MPSI, mais vous les étudierez en deuxième année.

Définition **(Série alternée)** On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de signe constant.

Exemple Les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-n}}{n^2+1}$ sont alternées.

Théorème **(Critère spécial des séries alternées)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ DÉCROISSANTE DE LIMITE NULLE. La série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge.



Démonstration Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ et montrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles seront alors convergentes de même limite, la SUITE $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera d'après le théorème des suites extraites et on aura ainsi prouvé que la SÉRIE $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Or par hypothèse : $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$, et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour une raison analogue. ■

Définition-théorème **(Séries de Riemann alternées)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, qu'on appelle une *série de Riemann alternée*, converge si et seulement si : $\alpha > 0$.

Pour $\alpha \in]0,1]$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente — elle converge, mais pas absolument.

Démonstration La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si : $\alpha \leqslant 0$, mais si au contraire : $\alpha > 0$, elle converge d'après le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle. ■

Il ne faut généralement pas appliquer le critère spécial des séries alternées directement quand on étudie une série alternée. L'hypothèse de décroissance peut être difficile à vérifiée, voire fausse. Dans les exemples importants qui suivent, le terme général est cassé en morceaux simples dont on se demande à part s'ils sont associés à des séries convergentes ou divergentes.

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}$ converge.

Démonstration La monotonie de la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ paraît délicate à étudier, le critère spécial des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Petit rappel : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + o(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + O(u)$.

$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin(\ln n)}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right).$$

Or : $\frac{3}{4} > 0$, donc la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ converge, et : $\frac{5}{4} > 1$, donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ aussi. Par somme, grâce au théorème de comparaison par des grands O, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}$ converge (absolument).

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

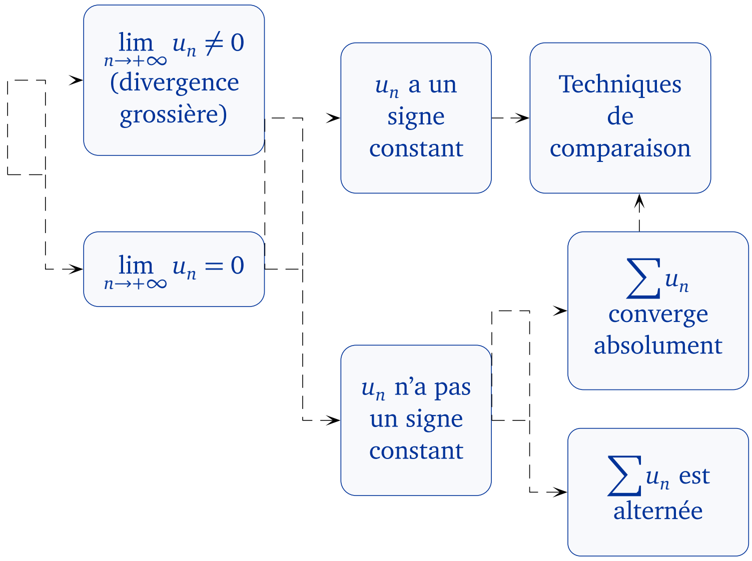
Démonstration La monotonie de la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)_{n\geqslant 2}$ paraît délicate à étudier, le critère spécial des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Rappel : $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2) \underset{u\to 0}{=} 1 - u + O(u^2)$.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or : $\frac{1}{2} > 0$, donc la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et : $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ aussi. En revanche, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par somme, grâce au théorème de comparaison par des grands O, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

✖ **Attention !** Le théorème de comparaison par des équivalents requiert la POSITIVITÉ des suites en présence, mais nous n'avons pas donné de contre-exemple jusqu'ici. Tout simplement : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge car : $\frac{1}{2} > 0$, pourtant $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge d'après l'exemple précédent.

5 Récapitulatif des techniques de convergence



Le schéma ci-contre rassemble et ordonne les résultats de convergence de ce chapitre. Il mérite un sérieux coup d'œil même si, comme souvent en mathématiques, ces résultats **ne permettent pas de conclure dans tous les cas**. La méthode qui marche tout le temps n'existe pas !

6 Produit de Cauchy

Le *produit de Cauchy* est hors programme en MPSI, mais vous l'étudierez en deuxième année. Il vaut mieux commencer par la fin pour comprendre le fond de l'affaire. Donnons-nous deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes et sentons-nous libres de regrouper ci-dessous les termes à notre guise sans rigueur.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} u_i v_j = \underbrace{u_0 v_0}_{i+j=0} + \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{i+j=1} + \underbrace{u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0}_{i+j=2} + \ldots + \underbrace{u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0}_{i+j=n} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Voilà, c'est cela le produit de Cauchy, et en principe, vous y reconnaissez l'idée classique du produit polynomial. Il nous reste bien sûr à justifier ce calcul sans rigueur.

Définition (Produit de Cauchy) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle *produit de Cauchy des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ la série de terme général : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0.$

Exemple Pour tout $x\in\mathbb{R}$, le produit de Cauchy de la série géométrique $\sum x^n$ avec elle-même est la série $\sum (n+1)x^n$ car pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = (n+1)x^n.$

Théorème (Convergence absolue d'un produit de Cauchy) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle p_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$ Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **absolument**, il en est de même de la série $\sum p_n$, et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration Posons : $\displaystyle U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$

- **Cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives :**

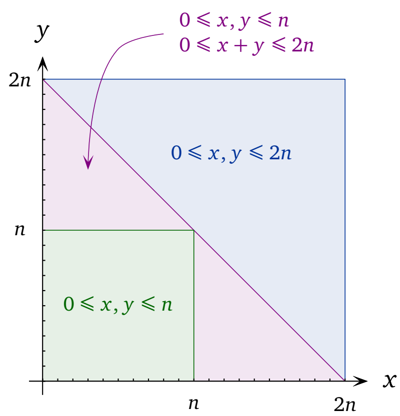
  Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $T_n = \left\{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2 \mid 0\leqslant i+j\leqslant 2n\right\}.$

  La figure ci-contre devrait vous convaincre que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

  $$[\![0,n]\!]^2 \subset T_n \subset [\![0,2n]\!]^2.$$

  Or pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} p_k = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant k\\ i+j=k}} u_i v_j = \sum_{(i,j)\in T_n} u_i v_j,$

  et on somme pour le moment des réels positifs, donc :



$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} u_iv_j \leqslant \sum_{(i,j)\in T_n} u_iv_j \leqslant \sum_{0\leqslant i,j\leqslant 2n} u_iv_j, \quad \text{autrement dit :} \quad \sum_{i=0}^n u_i \times \sum_{j=0}^n v_j \leqslant \sum_{k=0}^{2n} p_k \leqslant \sum_{i=0}^{2n} u_i \times \sum_{j=0}^{2n} v_j \quad \bigstar.$$

En particulier : $\displaystyle\sum_{k=0}^n p_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} p_k \leqslant UV$, donc la série à termes positifs $\sum p_n$ est majorée, donc converge, et par passage à la limite dans $\bigstar$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = UV$.

- **Cas général :** Posons cette fois : $\widehat{U} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, $\widehat{V} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$ et : $\widehat{p}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k|.|v_{n-k}|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'après le point précédent, la série $\sum \widehat{p}_n$ converge et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{p}_n = \widehat{U}\widehat{V}$. En outre, la série $\sum p_n$ converge absolument car pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^n |p_k| = \sum_{k=0}^n \left|\sum_{i=0}^k u_iv_{k-i}\right| \leqslant \sum_{k=0}^n\sum_{i=0}^k |u_i|.|v_{k-i}| = \sum_{k=0}^n \widehat{p}_k \leqslant \widehat{U}\widehat{V}$.
Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\left|\sum_{k=0}^{2n} p_k - \sum_{i=0}^n u_i \times \sum_{j=0}^n v_j\right| = \left|\sum_{(i,j)\in T_n} u_iv_j - \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} u_iv_j\right| = \left|\sum_{(i,j)\in T_n\setminus[\![0,n]\!]^2} u_iv_j\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_n\setminus[\![0,n]\!]^2} |u_i|.|v_j|$$
$$= \sum_{(i,j)\in T_n} |u_i|.|v_j| - \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} |u_i|.|v_j| = \sum_{k=0}^{2n}\widehat{p}_k - \sum_{i=0}^n |u_i| \times \sum_{j=0}^n |v_j| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{p}_n - \widehat{U}\widehat{V} = 0.$$
Comme voulu, par encadrement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = UV$. ■

✖ **Attention !** L'hypothèse de convergence ABSOLUE est cruciale dans ce résultat. Posons en effet : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La série $\sum u_n$ est semi-convergente d'après le critère spécial des séries alternées. Que dire alors de son produit de Cauchy par elle-même ? Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^n u_ku_{n-k}\right| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$, donc le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ par elle-même diverge (grossièrement).

Exemple Pour tout $x\in\,]-1,1[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Démonstration La série $\sum x^n$ converge absolument pour tout $x\in\,]-1,1[$ et nous avons vu que son produit de Cauchy par elle-même est la série $\sum(n+1)x^n$. Rappelons tout de même que nous savons démontrer ce résultat en dérivant la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis en faisant tendre n vers $+\infty$.

Exemple Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z'^n}{n!}$, autrement dit : $e^{z+z'} = e^ze^{z'}$.

Démonstration Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\times\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$. Les séries $\sum\dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum\dfrac{z'^n}{n!}$ convergent ABSOLUMENT, donc la série $\sum p_n$ aussi et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z'^n}{n!}$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après la formule du binôme : $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\times\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^kz'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$. En d'autres termes, la relation : $e^{z+z'} = e^ze^{z'}$ n'est jamais qu'une version pour les séries de la formule du binôme !